Finitary Projections の作る同型について

@myuon

2019 年 3 月 23 日

定義 1. domain D の finitary projection p とは, 次の条件を満たすもののこと.

1. $p : D \to D$ は連続写像
2. $p \circ p = p \sqsubseteq \mathrm{id}$
3. $\mathrm{im}(p)$ は domain

定義 2. N が poset P の normal subset であるとは, $N \subseteq P$ であって, 任意の $y \in P$ に対し $\downarrow y \cap N$ が directed なことをいう. このとき $N \lhd P$ とかく.

定理. *任意の domain D に対し, cpt のなす poset $\mathbf{K}(D)$ の normal subset と, D の finitary projections のなす poset $\mathbf{Fp}(D)$ の間に包含関係を保つ同型が存在する.*

Proof. $\{N \mid N \lhd \mathbf{K}(D)\}$ と $\mathbf{Fp}(D)$ の間の同型を定義する. まず normal subset N に対し, 写像 q を,

$$q : D \to D$$
$$q(x) = \bigsqcup(\downarrow x \cap N)$$

によって定義する.

補題 3. *この q は finitary projection である.*

Proof. はじめに continuous であることを示す. D の任意の directed subset M を 1 つ fix する. $\bigsqcup q(M) = \bigsqcup_{y \in M} q(y) = \bigsqcup_{y \in M} \bigsqcup(\downarrow y \cap N) \sqsubseteq \bigsqcup(\downarrow (\bigsqcup M) \cap N) = q(\bigsqcup M)$ であることは明らかであろう. 逆をみる. $\bigsqcup q(M)$ が $\downarrow (\bigsqcup M) \cap N$ の upper bound であることを示せばよい. $\alpha \in \downarrow (\bigsqcup M) \cap N$ とすると, $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup M$ かつ $\alpha \in N$ である. ところで N は $\mathbf{K}(D)$ の normal subset だったから N の点 α は cpt である. ゆえにある $z \in M$ が存在して, $\alpha \sqsubseteq z$ となり, すなわち $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup(\downarrow z \cap N) = q(z)$ である. よって, $\alpha \sqsubseteq \bigsqcup q(M)$ となり, $\bigsqcup q(M) = q(\bigsqcup M)$ であることがわかった.

次に, $q \circ q = q \sqsubseteq \mathrm{id}$ を示す. q の作り方から $q \sqsubseteq \mathrm{id}$ は明らか.

$$
\begin{aligned}
q(q(x)) &= q(\bigsqcup \downarrow x \cap N) \\
&= \bigsqcup q(\downarrow x \cap N) && (q \text{ は continuous}) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} q(z) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} \bigsqcup(\downarrow z \cap N) \\
&= \bigsqcup_{z \in \downarrow x \cap N} z && (\text{下で説明する}) \\
&= q(x)
\end{aligned}
$$

ただし最後から 2 つ目の式は, $z \in \downarrow x \cap N$ に対し, $\bigsqcup(\downarrow z \cap N) = z$ であることを用いた. このことは次のようにしてわかる: $\bigsqcup(\downarrow z \cap N) \sqsubseteq z$ であることは明らかであり, また z は N の元でもあるから $z \in \downarrow z \cap N$ でもあることより逆もわかる.

最後に, $\mathrm{im}(q)$ が domain であることをいう. ここでは, $N \cap \mathrm{im}(q)$ が $\mathrm{im}(q)$ の basis となること, すなわち, 任意の $y \in \mathrm{im}(q)$ に対して $\bigsqcup(\downarrow y \cap N \cap \mathrm{im}(q)) = y$ となることを示す. $x \in D$ を, $q(x) = y$ となるものとしてとる.

$$
\begin{aligned}
\bigsqcup(\downarrow y \cap N \cap \mathrm{im}(q)) &= \bigsqcup(\downarrow q(x) \cap N \cap \mathrm{im}(q)) \\
&= \bigsqcup(\downarrow x \cap N \cap \mathrm{im}(q)) && \text{(a)} \\
&= \bigsqcup(\downarrow q(x) \cap N) && \text{(b)} \\
&= \bigsqcup(\downarrow x \cap N) && \text{(c)} \\
&= y
\end{aligned}
$$

順に示す. (a) $z \in (\downarrow x \cap N \cap \mathrm{im}(q))$ に対し, $z \sqsubseteq x$ かつ $z \in \mathrm{im}(q)$ であるから, 両辺を q で写すと $z = q(z) \sqsubseteq q(x)$ となり, $z \in (\downarrow q(x) \cap N \cap \mathrm{im}(q))$ である. (b) $q(x) \sqsubseteq x$ により, $\bigsqcup(\downarrow q(x) \cap N) \sqsubseteq \bigsqcup(\downarrow x \cap N \cap \mathrm{im}(q))$ であることはよい. $z \in (\downarrow x \cap N \cap \mathrm{im}(q))$ に対し, $z \sqsubseteq x$ かつ $z \in \mathrm{im}(q)$ であるから, 先程と同様にして $z \sqsubseteq q(x)$ であり, $z \in (\downarrow q(x) \cap N)$. (c) $z \in (\downarrow x \cap N)$ に対し, $z \sqsubseteq \bigsqcup(\downarrow x \cap N) = q(x)$ であり, $z \in N$ でもあるから $z \in (\downarrow q(x) \cap N)$ となる. よって $\mathrm{im}(q)$ は domain.

以上のことより, q は finitary projection である. □

次に, D の finitary projection p に対し, $L = \mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)$ によって定義する.

事実. *D を domain, p を D 上の finitary projection とすると, $\mathbf{K}(\mathrm{im}(p)) = \mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)$ である.*

補題 4. *任意の finitary projection p に対し, 次の等式が成り立つ.*

$$
p(x) = \bigsqcup(\downarrow p(x) \cap L)
$$

Proof. p は finitary projection であるから $\mathrm{im}(p)$ は domain であり, このことと上の事実により, 任意の $y \in \mathrm{im}(p)$ に対し $y = \bigsqcup(\downarrow y \cap L)$ が成り立つ. $\square$

補題 5. L は $\mathbf{K}(D)$ の *normal subset* である.

Proof. subset であることはよい. $x \in \mathbf{K}(D)$ を 1 つ fix する. $\downarrow x \cap L$ が directed であることを示す. $\downarrow x \cap L$ の任意の元 x_1, x_2 に対しその upper bound が存在すればよい. ところで, $i \in \{1, 2\}$ とすると $x_i \sqsubseteq x$ であり, これらを p で写すと $p(x_i) = x_i \sqsubseteq p(x)$ が成り立つ ($x_i \in \mathrm{im}(p)$ であることと $p \circ p = p$ を用いた). 補題の右辺の $\downarrow p(x) \cap L$ は directed であり, $x_i \in \downarrow p(x) \cap L$ であることより, x_1, x_2 の upper bound が存在する. よって $\downarrow x \cap L$ は directed. $\square$

最後に, これらが同型を与えることをみる. まず $\mathbf{K}(D)$ の normal subset N に対し, q を上で定めた写像とし, $N = \mathrm{im}(q) \cap \mathbf{K}(D)$ を示す.

$$\begin{aligned} \mathrm{im}(q) \cap \mathbf{K}(D) &= \mathbf{K}(\mathrm{im}(q)) && (q \text{ は f.p. であることと上で認めた事実より}) \\ &= \mathrm{im}(q) \cap N && (\mathrm{im}(q) \text{ が domain の証明より}) \end{aligned}$$

N の任意の元 x に対し, $x \in (\downarrow x \cap N)$ により, $x \sqsubseteq \bigsqcup(\downarrow x \cap N) = q(x)$. 一方, $q(x) \sqsubseteq x$ は成り立つから, $x = q(x)$ となり, $x \in \mathrm{im}(q)$ である. よって, $N \subseteq \mathrm{im}(q)$ であるから, $\mathrm{im}(q) \cap N = N$ となる.

逆に, p を finitary projection とする. normal subset $\mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)$ に対し, finitary projection q を上のように構成する. このとき $p = q$ を示す. $x \in D$ に対し, $q(x) = \bigsqcup(\downarrow x \cap \mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D))$ であった. ところで, $\mathrm{im}(q)$ が domain を示した証明の (a) と同様にして, $\bigsqcup(\downarrow x \cap \mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D)) = \bigsqcup(\downarrow p(x) \cap \mathrm{im}(p) \cap \mathbf{K}(D))$ であり, 補題 4 により, これは $p(x)$ に等しい. よって $p = q$ となる.

以上により, 同型が示された. $\square$

参考文献

[1] Carl A. Gunter. (1992). Semantics of Programming Languages, Theorem 10.12.