Approx と Alg が圏同値であること

myuon

2018 年 9 月 2 日

定義 1. category **Approx** を次で定義する.

- object: poset
- arrow: poset relation $f \subseteq A \times B$ が **approximable** とは, 次の条件を満たすものとする. A から B への射をこのような approximable function f によって定める.
  - 任意の $a \in A$ に対してある $b \in B$ が存在して, $(a, b) \in f$ となる. (全域性)
  - $(a, b) \in f$ かつ $(a, b') \in f$ に対し, ある $b'' \in B$ が存在して, $(a, b'') \in f$ かつ $b \sqsubseteq b''$ かつ $b' \sqsubseteq b''$ となる.
  - $a' \sqsubseteq a$ かつ $(a', b') \in f$ かつ $b \sqsubseteq b'$ のとき, $(a, b) \in f$
- id: $\{(x, y) \in A \times A \mid y \sqsubseteq x\}$
- composition: $f : A \to B$ と $g : B \to C$ に対して $g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B. (a, b) \in f \land (b, c) \in g\}$

Proof. (id が approximable であること) $(x, x) \in \mathrm{id}$ により, 全域性はよい. $(a, b) \in \mathrm{id}$ かつ $(a, b') \in \mathrm{id}$ のとき, $b \sqsubseteq a$ かつ $b' \sqsubseteq a$ であり, $(a, a) \in \mathrm{id}$ となるからよい. また, $a' \sqsubseteq a$, $(a', b') \in \mathrm{id}$, $b \sqsubseteq b'$ のとき, $b \sqsubseteq b' \sqsubseteq a' \sqsubseteq a$ であるから $(a, b) \in \mathrm{id}$ である.

(identity law) $f : A \to B$ を任意にとる. $f \subseteq f \circ \mathrm{id}$ は明らか. $(a, b) \in f \circ \mathrm{id}$ とすると, $a' \in A$ が存在して $(a, a') \in \mathrm{id}$ かつ $(a', b) \in f$ である. ここで, $a' \sqsubseteq a$ であるので, approximable function の定義により $(a, b) \in f$ である. よって $f \circ \mathrm{id} \subseteq f$ となる. □

定義 2. category **Alg** を次で定義する.

- object: algebraic cpo
- arrow: continuous function

事実. *poset A に対して, その ideal の集合 $\mathbf{Idl}(A)$ は algebraic cpo となり, $\mathbf{Idl}(A)$ の compact element は A の principal ideal である.*

定理 3. *algebraic cpo に対して compact element を対応させる functor K は **Approx** と **Alg** の間の圏同値を与える.*

Proof. (essentially surjective) 任意の poset A に対して, $\mathbf{Idl}(A)$ が approximable function の同型 $K(\mathbf{Idl}(A)) \simeq A$ を与えることをみる．ところで, $K(\mathbf{Idl}(A)) = \mathbf{PIdl}(A)$ であったので, 同型の対応は $\downarrow a$ と $a \in A$ を対応付ければよいことは明らか．relation $f \subseteq A \times \mathbf{Idl}(A)$ を, $f = \{(a, \downarrow b) \mid b \sqsubseteq a\}$ によって定めればこれが approximable であり, さらに前述の同型を与えることもわかる．

(fully faithful) K を functor に拡張したものを $\varphi : \mathbf{Alg} \to \mathbf{Approx}$ と書くことにする．arrow part は次のようにする:

$$\varphi(f : A \to B) = \{(a, b) \in K(A) \times K(B) \mid b \sqsubseteq f(a)\}$$

また, $\psi : \mathbf{Approx} \to \mathbf{Alg}$ の object part を $A \mapsto \mathbf{Idl}(A)$ で与える．次に arrow part であるが, approximable function $g : A \to B$ を $\mathbf{Idl}(A) \to \mathbf{Idl}(B)$ なる continuous function に送ることを考える．ところで algebraic cpo の間の continuous function は compact element での振る舞いのみきめればよい．そして ideal の compact element は principal ideal であり, principal ideal は元の poset と自明な対応をもつから, 結局のところ g の行き先とは次の関数から完全に決定される:

$$\psi_*(g) := x \mapsto \bigsqcup\{b \in K(B) \mid \exists a \in K(A).\, a \sqsubseteq x \wedge (a, b) \in g\}$$

念のため書き下せば, $\psi(g)$ は次のような関数である: $S \in \mathbf{Idl}(A)$ をとる．S は principal ideal を使って $S = \bigsqcup\{\downarrow a \mid \downarrow a \subseteq S\}$ と書ける．このとき, $\psi(g)(S) = \psi(g)(\bigsqcup\{\downarrow a \mid \downarrow a \subseteq S\}) = \bigsqcup\{\downarrow (\psi_*(a)) \mid \downarrow a \subseteq S\}$ である．

さて, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ と $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ をそれぞれ示す．

approximable function $g : A \to B$ を任意にとる．$(a, b) \in \varphi(\psi(g))$ は $b \sqsubseteq \psi_*(g)(a) = \bigsqcup\{b' \in K(B) \mid \exists a' \in K(A).\, a' \sqsubseteq a \wedge (a', b') \in g\}$ と同値であり, この条件は $(a, b) \in g$ に明らかに一致する．よって $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ である．

次に, continuous function $f : A \to B$ と $a \in A$ を任意にとる．$\psi(\varphi(f))(a) = f(a)$ を示したいが, これも compact element で一致することのみ言えばよいから a は compact であるとしてよい．このとき左辺は

$$\begin{aligned}
\psi_*(\varphi(f))(a) &= \bigsqcup\{b \in K(B) \mid \exists a' \in K(A).\, a' \sqsubseteq a \wedge (a', b) \in \varphi(f)\} \\
&= \bigsqcup\{b \in K(B) \mid \exists a' \in K(A).\, a' \sqsubseteq a \wedge b \sqsubseteq f(a')\} \\
&= \bigsqcup\{b \in K(B) \mid b \sqsubseteq f(a)\} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

と変形できる．よって $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ となることがわかる． □