CCC model の soundness に関する補足

myuon

2018 年 5 月 16 日

次のような型を持つ simply-typed lambda calculus を考える．Σ を signature set とする．

$$A ::= 1 \mid A_1 \times A_2 \mid A_1 \to A_2 \mid b \qquad (b \in \Sigma)$$

このようなラムダ計算の CCC model を構成する．このとき次の soundness を示すことを考える．

定理 1 (Soundness for CCC models)**.** *$\mathcal{C}$ を CCC とする．このとき，$\Gamma \vdash M = N : A$ であれば $\mathcal{C}[\![\Gamma \vdash M : A]\!] = \mathcal{C}[\![\Gamma \vdash N : A]\!]$.*

β 変換に関する部分のみ示す．

証明． 次のケースを考える．

$$\frac{\Gamma, x : s \vdash M : t \qquad \Gamma \vdash N : s}{\Gamma \vdash (\lambda x : s.M)N = M[N/x] : t}\,(\beta)$$

等式の左辺は CCC model の定義を思い出すと次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma \vdash (\lambda x : s.M)N : t]\!] &= \mathrm{apply} \circ \langle \mathrm{curry}\left([\![\Gamma, x : s \vdash M : t]\!]\right), [\![\Gamma \vdash N : s]\!] \rangle \\
&= \mathrm{apply} \circ \left(\mathrm{curry}\left([\![\Gamma, x : s \vdash M : t]\!]\right) \times \mathrm{id}\right) \circ \langle \mathrm{id}, [\![\Gamma \vdash N : s]\!] \rangle \\
&= [\![\Gamma, x : s \vdash M : t]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\Gamma \vdash N : s]\!] \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma \arrow[d, "\langle \mathrm{id}, N \rangle"] & \\
\Gamma \arrow[d, dashed, "\hat{M}"'] & \Gamma \times s \arrow[d, "\hat{M} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "M"] & \\
s^t & s^t \times s \arrow[r, "\mathrm{apply}"'] & t
\end{tikzcd}$$

よって，$[\![\Gamma, x : s \vdash M : t]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\Gamma \vdash N : s]\!] \rangle = [\![\Gamma \vdash M[N/x] : t]\!]$ を示せばよいことがわかる．証明は次の補題による． □

補題 2. $[\![\Gamma \vdash M[N/x] : t]\!] = [\![\Gamma, x : s \vdash M : t]\!] \circ \langle \mathrm{id}, [\![\Gamma \vdash N : s]\!] \rangle$.

証明． M についての induction.

ケース 1. $M \equiv \lambda y : u.\, M'$, $t \equiv u \to v$ のとき．τ^n_k を直積 $\prod A_i$ の $(k, k+1)$ 番目を swap する射

(積自体はいずれも左結合として考える) とする.

$$
\begin{aligned}
&\text{(LHS)}\\
&= \llbracket \Gamma \vdash \lambda y : u.\, M'[N/x] : u \to v \rrbracket\\
&= \mathrm{curry}\,(\llbracket \Gamma, y : u \vdash M'[N/x] : v \rrbracket)\\
&= \mathrm{curry}\,(\llbracket \Gamma, y : u, x : s \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma, y : u \vdash N : s \rrbracket \rangle) && \text{(substitution lemma)}\\
&= \mathrm{curry}\,(\llbracket \Gamma, y : u, x : s \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \circ \mathrm{fst} \rangle) && \text{(帰納法の仮定)}\\
&= \mathrm{curry}\,\big(\llbracket \Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket \circ \tau^n_{n-2} \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \circ \mathrm{fst} \rangle\big) && \text{(exchange lemma)}\\
&= \mathrm{curry}\,(\llbracket \Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle \times \mathrm{id}) && \text{(補題 3 による)}\\
&= \mathrm{curry}\,(\llbracket \Gamma, x : s, y : u \vdash M' : v \rrbracket) \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle && \text{(補題 4 による)}\\
&= \llbracket \Gamma, x : s \vdash \lambda y : u.\, M' : u \to v \rrbracket \circ \langle \mathrm{id}, \llbracket \Gamma \vdash N : s \rrbracket \rangle\\
&= \text{(RHS)}
\end{aligned}
$$

ケース 2.　他のケースは省略.

□

補題 3. $g : A \to C$ とする. $\tau^3_2 \circ \langle \mathrm{id}, g \circ \mathrm{fst} \rangle = \langle \mathrm{id}, g \rangle \times \mathrm{id}$ である.

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[rr, "\langle \mathrm{id}, g \rangle \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\langle \mathrm{id}, g \circ \mathrm{fst} \rangle"'] & & A \times C \times B \\
& A \times B \times C \arrow[ur, "\tau^3_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明. A 及び B は不変であり, C は両辺ともに g によって引き起こされることからわかる. □

補題 4. $f : A \to B,\ g : B \times C \to D$ に対し, $\mathrm{curry}(g) \circ f = \mathrm{curry}(g \circ (f \times \mathrm{id}))$.

証明. 次の図式を考える. 左の三角は可換である. 右の三角は exponential の定義により可換である.

$$
\begin{tikzcd}
A \times C \arrow[r, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "(\hat{g} \circ f) \times \mathrm{id}"'] & B \times C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\hat{g} \times \mathrm{id}"] & D \\
& D^C \times C \arrow[ur, "\mathrm{apply}"'] &
\end{tikzcd}
$$

全体の可換性により, $\mathrm{apply} \circ ((\mathrm{curry}(g) \circ f) \times \mathrm{id}) = g \circ (f \times \mathrm{id})$ が成り立つ. さて, exponential の一意性により, 任意の $g : B \times C \to D$ に対し, $g' : B \to D^C$ であって $g = \mathrm{apply} \circ (g' \times \mathrm{id})$ となるような g' がただ一つ存在する. このことを用いると, $\mathrm{apply} \circ ((\mathrm{curry}(g) \circ f) \times \mathrm{id}) = \mathrm{apply} \circ (\mathrm{curry}(g \circ (f \times \mathrm{id})) \times \mathrm{id})$ を示せれば欲しい等式が得られることがわかる. このことと, $\mathrm{apply} \circ (\mathrm{curry}(g) \times \mathrm{id}) = g$ とを合わせれば証明が完了する. □