Category Theory in Computer Science

myuon

2018 年 3 月 28 日

目次

概要

Computer Science で必要になるであろう圏論の知識をまとめる.

1 Categories

1.1 Category

定義 1 (category)**. category** $\mathbb{C}$ は次のようなものからなる.

- Obj : object(対象) からなる collection[*1]
- Arr : arrow(射) からなる collection
- dom : Arr $\to$ Obj, cod : Arr $\to$ Obj なる function; $f \in$ Arr であって, $\mathrm{dom}(f) = A$, $\mathrm{cod}(f) = B$ となるもののことを $f : A \to B$ とかく.
- id : Obj $\to$ Arr; 1 とかくこともある.
- $(\circ)$: Arr $\times$ Arr $\rightharpoonup$ Obj; $f \circ g$ は, $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(f)$ なるとき定義される

であって, 次の等式を満たす:

- (associativity) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- (identity) $f : A \to B$ に対し, $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$

category $\mathbb{C}$ の arrow であって dom が A, cod が B であるようなものの集まりを $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ とかく. 一般に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ は集合になるとは限らない. これが集合になるような category を **locally small** とよぶ. また, Obj と Arr がいずれも集合になる category を **small** とよぶ. 以下では基本的には locally small な category しか扱わないのであまりこの違いを気にする必要はない.

上の定義では object, arrow から category を定めたが, Hom を各 object ごとに定め, $\mathrm{Arr}(\mathbb{C}) = \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B) \mid A, B \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})\}$ として category を定義することも出来る.

category の例を挙げる.

例 2. 集合とその上の構造物, および構造を保つ写像からなる category の例:

- **Set**: 集合と写像のなす category
- **Poset**: poset とその間の monotone map のなす category
- **Grp**, **Ring**, R-**Mod**, **Ab**: それぞれ群, 環, R-加群, アーベル群とその間の準同型のなす category
- **Top**: 位相空間と連続写像のなす category

例 3. その他の例:

- poset P: P の各元を object, $\mathrm{Hom}(A, B) = \{\star\}$ ($A \le B$ のとき), $\mathrm{Hom}(A, B) = \{\}$ (それ以外) によって category とみなすことができる. identity の存在が reflexitivity により, associativity は preorder の transitivity により保証される.
- opposite category: $\mathbb{C}$ の **opposite category** $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ を, 各 arrow の向きを反転させたものとする. すなわち, $\mathrm{dom}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(f) = \mathrm{cod}_{\mathbb{C}}(f)$, $\mathrm{cod}_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbb{C}}(f)$, $g \circ_{\mathbb{C}^{\mathrm{op}}} f = f \circ_{\mathbb{C}} g$ などとするともとの $\mathbb{C}$ が category ならば $\mathbb{C}^{\mathrm{op}}$ は再び category の規則を満たす.

1.2 Functor

category の構造を保つような mapping を functor とよぶ.

定義 4 (functor)**.** category $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ に対し, **functor** $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ は次のようなものからなる.

- $F_{\mathrm{obj}} : \mathrm{Obj}(\mathbb{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathbb{D})$

[*1] ここでは collection と呼んでいるが, 後ほどでも出てくるように Obj, Arr が大きすぎて集合にならないような category が必要になることがある. このような category を取り扱うために, しばしば (Grothendieck) universe と呼ばれる, ある種の操作について閉じた集合を固定しその中で理論を展開するという方法を取ることもある. 以下の議論は全て適当な universe の中で行っていると思うことにし, category の "大きさ" の議論には立ち入らない.

- $F_{\mathrm{arr}} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(F_{\mathrm{obj}}A, F_{\mathrm{obj}}B)$

であって, 次の条件を満たす:

- (preserving identity) $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$
- (covariance) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

この定義は, category の構造 (すなわち object, arrow, domain, codomain, identity, composition) を保つ mapping と言い換えることが出来る.

1.3 Natural Transformation

functor の構造を保つ mapping を natural transformation とよぶ.

定義 5 (natural transformation)**.** functor $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対し, **natural transformation** $\alpha : F \Rightarrow G$ は次のようなものからなる.

- $\alpha_A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FA, GA)$

であって, 次の条件を満たす:

- (naturality) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, B)$ に対し, $Gf \circ \alpha_A = \alpha_B \circ Ff$

naturality の条件は次の可換図式によっても表現することが出来る.

$$\begin{array}{ccc} A & \quad & FA \xrightarrow{\alpha_A} GA \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \qquad \downarrow{\scriptstyle Gf} \\ B & & FB \xrightarrow{\alpha_B} GB \end{array}$$

1.4 Functor Category

定義 6 (functor category)**.** $\mathbb{C}, \mathbb{D}$ を category とする. **functor category** $[\mathbb{C}, \mathbb{D}]$ とは, 次のようにして定まる category である.

- $\mathrm{Obj} = \{F : \mathbb{C} \to \mathbb{D} \mid F$ は functor$\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, G) = \{\alpha : F \Rightarrow G \mid \alpha$は natural transformation$\}$
- $\mathrm{id}_F : F \Rightarrow F$ は $(\mathrm{id}_F)_A = \mathrm{id}_{FA}$ で定まる nat
- $\alpha : F \Rightarrow G$, $\beta : G \Rightarrow H$ に対し, $\beta \circ \alpha : F \Rightarrow H$ を, $(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$ で定まる nat

ただし, functor と nat の同値性を次のように定めておく.

- $F = G$ iff $\forall A.\ FA = GA$ かつ $\forall f : A \to B.\ Ff = Gf$
- $\alpha = \beta$ iff $\forall A.\ \alpha_A = \beta_A$

1.5 Duality

category の図式の arrow の向きを全て逆にしたものを, 元の図式の dual(双対) とよぶ. category において定義されるものは, 定義に出現する図式を反転することで dual をとることができる. すでに opposite category が dual な概念として登場したが, 他にも dual や dual に関連する概念が存在する.

定義 7 (contravariant functor)**.** $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ に対し, F_{arr} の arrow の向きを反転させることで新

たな functor $F^{\mathrm{op}} : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbb{D}$ が得られる．これを **contravariant functor** とよぶ (F は covariant functor とよぶ)．F^{op} の定義を書き下すと (covariance) 規則の代わりに次の (contravariance) 規則が得られる:

- (contravariance) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

2 Special Objects & Morphisms

2.1 Monic, Epic

定義 8 (monic)**.** $f : B \to C$ が **monic** であるとは, 任意の $g, h : A \to B$ に対し, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ となることである．これを $f : B \rightarrowtail C$ とかいたりする．

$$A \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} B \overset{f}{\rightarrowtail} C$$

定義 9 (epic)**.** $f : A \to B$ が **epic** であるとは, 任意の $g, h : B \to C$ に対し, $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ となることである．これを $f : A \twoheadrightarrow B$ とかいたりする．

$$A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C$$

注意 10. monic, epic は **Set** ではそれぞれ単射, 全射に一致する．

2.2 Isomorphism

定義 11 (isomorphism)**.** $f : A \to B$ が **isomorphism** であるとは, ある $g : B \to A$ が存在して, $f \circ g = 1_B$ かつ $g \circ f = 1_A$ となることである．このとき A は B に **isomorphic** といい, $A \simeq B$ でかく．

注意 12. iso ならば epi かつ mono は正しいが, 逆は必ずしも真ではない (逆が成り立つような category を balanced という)．反例として, **Top** で 2 点集合 $\{a, b\}$ に離散位相を入れた空間 X_d, 密着位相を入れた空間 X_i を用意すると, 恒等写像 $i : X_d \to X_i$ は epi かつ mono だが (逆が連続でないので) iso ではない．

注意 13. isomorphism はしばしば "弱い意味での" 同値性として扱われる．category theory では色々な種類の同値性があり, その中でも $\simeq$ でかかれる isomorphic equivalence は "weak" equivalence と呼ぶことがある．

2.3 Terminal Object

定義 14 (terminal object)**.** $\mathbb{C}$ の **terminal object** $1 \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$ とは, 任意の object X に対し, $X \to 1$ なる arrow がただ一つ存在するようなもののことである．

2.4 Product

定義 15 (product)**.** $\mathbb{C}$ の object A, B に対し, A と B の **product** は次のようなものからなる．

- object $A \times B$
- arrow $p_A : A \times B \to A$, $p_B : A \times B \to B$; これらを projection とよぶ

であって, 次の条件を満たす.

- (universality) 任意の object Q と arrow $f : Q \to A$, $g : Q \to B$ が与えられた時, $h : Q \to A \times B$ であって, $p_A \circ h = f$ かつ $p_B \circ h = g$ なるようなものがただ一つ存在する.

product の universality は以下の図式で表せる. ただし universality により保証される, 唯一存在する arrow をここでは破線でかいた.

$$
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

命題 16 (symmetric monoidality)**.** 次のような同型が存在する.

- $(A \times B) \times C \simeq A \times (B \times C)$
- $1 \times A \simeq A \times 1 \simeq A$
- $A \times B \simeq B \times A$

2.5 Dual Objects

定義 17. 次のように定義する.

- terminal object の dual を **initial object** とよび, 0 でかく
- product の dual を **coproduct** とよび, + でかく.

2.6 Examples

Special Object の例をいくつかの category で見ておく.

category	terminal object	product	initial object	coproduct
Set	singleton $\{\star\}$	直積	emptyset $\emptyset$	disjoint union
poset P	最大元	sup	最小元	inf
Ab	$\{\star\}$	直積	$\{\star\}$	直和 (=直積)

注意 18. 上にあげた例はそれぞれの category において特徴的な性質を端的に表す例である.

- **Set** は special objects の最も直観的な例を与えている. 特に product, coproduct がそれぞれ集合演算としての積と和に対応していることが分かるだろう.
- poset を category とみなすと, special objects は具体的な元を表す. 特に 1 と表記される terminal object が最大元として現れていることに注意しよう. bounded lattice $[0,1]$ の構造はこの特別な場合である.
- **Ab** では, terminal object と initial object が, そして product と coproduct がそれぞれ一致している. このような terminal かつ initial object を **zero object**, product かつ coproduct を **biproduct** とよぶ. これは **Ab** が Abelian category とよばれる, 代数的位相幾何学等で重要な役割を果たす category であり, zero object と biproduct をもつことが Abelian category の定義に含まれているからである.

2.7 Exponential Object

定義 19 (exponential object)**.** $\mathbb{C}$ を product をもつ category とする． $A, C \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$ に対し, **exponential object** C^A とは, 次のようなものである.

- object: $C^A \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$
- arrow $\mathrm{ev} : A \times C^A \to C$; これは evaluation map とよばれる

であって, 次を満たすようなもの.

- (universality) 任意の $f : A \times B \to C$ に対し, $g : B \to C^A$ であって, $\mathrm{ev} \circ (1 \times g) = f$ なるようなものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, dashed, "g"] & A \times B \arrow[d, "1\times g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ C^A & A \times C^A \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & C \end{tikzcd}$$

Exponential は “関数空間” を表現するような概念である．特に computer science では重要な役割を果たす.

例 20. A, B を set とする．**Set** での exponential object B^A とは, 写像の集合
$B^A = \{f : A \to B \mid f$ は写像 $\}$ と, 次のようにして定まる evaluation からなる.

$$\mathrm{ev} : A \times C^A \to C$$
$$\mathrm{ev}(a, f) = f(a)$$

定義 21 (cartesian-closed category)**.** $\mathbb{C}$ が **cartesian-closed category** であるとは, $\mathbb{C}$ が terminal object, product, exponential object をもつことをいう.

例 22. **Set** は 1 点集合, 直積, 写像の集合によって cartesian-closed である.

命題 23. 次のような同型が存在する.

- $X^1 \simeq X$
- $(X^Y)^Z \simeq X^{Y \times Z}$
- $(X \times Y)^Z \simeq X^Z \times Y^Z$

3 Special Functors

3.1 Limits

定義 24 (diagonal functor)**. diagonal functor** (constant functor) $\Delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\mathbb{J}}$ とは, 次のようにして定義されるもののことである.

- $\Delta(C)(j) = C$
- $\Delta(f : C \to D)(j) = f$

arrow は全て identity に map される.

定義 25 (limit)**.** $\mathbb{J}$ を category (index category などとよぶ), $\mathbb{C}$ を category とする．$F : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ の **limit** とは, 次のようなものである.

- object $L \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$; これを $\varprojlim F$ とかく
- natural transformation $\tau : \Delta(L) \Rightarrow F$ (limiting cone とよぶ)

であって, 次のような条件を満たす.

- (universality) 任意の object $C \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$ と natural transformation $\theta : \Delta(C) \Rightarrow F$ に対し, $h : C \to L$ であって, $\tau \circ \Delta(h) = \theta$ となるようなものがただ一つ存在する.

$$\begin{array}{cc} \mathbb{C} & \begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "h"] & L \end{tikzcd} \\ \mathbb{C}^{\mathbb{J}} & \begin{tikzcd} \Delta(C) \arrow[rr, "\Delta(h)"] \arrow[dr, Rightarrow, "\theta"'] & & \Delta(L) \arrow[dl, Rightarrow, "\tau"] \\ & F & \end{tikzcd} \end{array}$$

limit の index category が small, あるいは finite のときその limit を small, あるいは finite とよぶ.

例 26 (terminal object)**.** $F : 0 \to \mathbb{C}$ を empty category からの unique な functor とする. このとき $\varprojlim F = 1 \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$ である.

例 27 (product)**.** $\mathbf{2} = \{\star_1, \star_2\}$ を 2 点からなる discrete category とする. $F : \mathbf{2} \to \mathbb{C}$ とすると, $\varprojlim F = F(\star_1) \times F(\star_2) \in \mathrm{Obj}(\mathbb{C})$ である.

3.2 Adjoint Functors

定義 28 (adjoint)**.** $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を functor とする. F と G が **adjoint**, または F が G の **left adjoint**, または G が F の **right adjoint** であるとは, 次をみたすときをいう. また, これを $F \dashv G$ とかく.

- $\varphi_{A,B} : \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FA, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, GB)$ なる isomorphism (これを adjunction とよぶ) が存在して, さらにこれが A, B について natural である

$$\begin{tikzcd} A & B \arrow[d, "g"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FA, B) \arrow[r, "\varphi_{A,B}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(Ff,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, GB) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(f,Gg)"] \\ A' \arrow[u, "f"] & B' & \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(FA', B') \arrow[r, "\varphi_{A',B'}"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A', GB') \end{tikzcd}$$

定義 29 (unit)**.** $F \dashv G$ とする. このとき natural transformation $\eta : 1 \Rightarrow GF$ が次のようにして定まる. これを **unit** とよぶ.

- $\eta_A = \varphi_{A,FA}(\mathrm{id}_{FA}) : A \to GFA$

定義 30 (counit)**.** $F \dashv G$ とする. このとき natural transformation $\varepsilon : FG \Rightarrow 1$ が次のようにして定まる. これを **counit** とよぶ.

- $\varepsilon_A = \varphi^{-1}_{GA,A}(\mathrm{id}_{GA}) : FGA \to A$

命題 31 (triangular identities)**.** *$F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$, $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ を functor とする. $F \dashv G$ であることと次は同値である.*

- *nat* $\eta : 1 \Rightarrow GF$, $\varepsilon : FG \Rightarrow 1$ が存在する
- $G\varepsilon \circ \eta G = id_G$ かつ $\varepsilon F \circ F\eta = id_F$

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, equal] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, equal] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}
$$

命題 32. $X \times (-) \dashv (-)^X$

これと随伴の一意性により, cartesian-closed category とは, terminal object と product を備え, 上の随伴が存在するような category という定義も出来る.

3.3 End

定義 33 (wedge)**.** $F : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ を functor とする. F 上の **wedge** $e : w \to F$ とは次のようなものからなる.

- object $w \in \mathbb{C}$
- a family of arrows $e_c : w \to F(c, c)$ for $c \in \mathbb{C}$

であって, 次の条件を満たす.

- (wedge diagram) 任意の arrow $f : c \to c'$ に対し, $F(f, c') \circ e_{c'} = F(c, f) \circ e_c$

$$
\begin{tikzcd}
& F(c', c') \arrow[dr, "F(f,c')"] & \\
w \arrow[ur, "e_{c'}"] \arrow[dr, "e_c"'] & & F(c, c') \\
& F(c, c) \arrow[ur, "F(c,f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

定義 34 (end)**.** $F : \mathbb{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ を functor とする. F の end とは次のようなものからなる.

- wedge $e : w \to F$; wedge の object w を $\int_{c \in \mathbb{C}} F(c, c)$ とかく

であって, 次の条件を満たす.

- (universality) 任意の wedge $e' : w' \to F$ に対し, $h : w' \to w$ であって, 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $e_c \circ h = e'_c$ となるようなものがただ一つ存在する

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[rr, dashed, "h"] \arrow[dr, "e"'] & & w' \arrow[dl, "e'"] \\
& F &
\end{tikzcd}
$$

4 All Concepts are Kan Extensions

4.1 Kan 拡張

定義 35 (左 Kan 拡張)**.** $F : \mathbb{C} \to \mathbb{D}, E : \mathbb{C} \to \mathbb{U}$ を functor とする. F に沿った E の左 Kan 拡張とは, 次のようなものからなる.

- functor $F^\dagger E : \mathbb{D} \to \mathbb{U}$; $F^\dagger E$ または $\mathrm{Lan}_F E$ とかく
- nat $\eta : E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$

であって, 次のような条件を満たす.

- (universality) 任意の functor $S : \mathbb{D} \to \mathbb{U}$ と nat $\sigma : E \Rightarrow SF$ に対し, nat $\tau : F^{\dagger}E \Rightarrow S$ であって, $\tau F \circ \eta = \sigma$ となるようなものがただ一つ存在する

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{C} \arrow[rr, "E"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathbb{U} \\
& \mathbb{D} \arrow[ur, "F^{\dagger}E"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathbb{D}, \mathbb{U}]} & F^{\dagger}E \arrow[rr, Rightarrow, dashed, "\tau"] & & S \\
{[\mathbb{C}, \mathbb{U}]} & F^{\dagger}E \circ F \arrow[rr, Rightarrow, "\tau F"] & & S \circ F \\
& & E \arrow[ul, Rightarrow, "\eta"] \arrow[ur, Rightarrow, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[1] nLab, `https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage`

[2] alg-d.com, `http://alg-d.com/math/kan_extension/`